第４講　３次の面積と無限級数，不等式が成り立つ条件，斜回転体の体積

10　xy 平面上の曲線 $C: y=x^3+x^2+1$ を考え，C 上の点 $(1,\ 3)$ を P_0 とする．$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 $\mathrm{P}_{k-1}(x_{k-1},\ y_{k-1})$ における C の接線と C の交点のうちで P_{k-1} と異なる点を $\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k)$ とする．このとき P_{k-1} と P_k を結ぶ線分と C によって囲まれた部分の面積を S_k とする．

(1)　S_1 を求めよ．

(2)　x_k を k を用いて表せ．

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}$ を求めよ．

《14 東工大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

11　$a>1$ とし，次の不等式を考える．

$$(*)\quad \frac{e^t-1}{t} \geqq e^{\frac{t}{a}}$$

(1)　$a=2$ のとき，すべての $t>0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つことを示せ．

(2)　すべての $t>0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つような a の範囲を求めよ．

《14 東工大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

12　点 P$(t,\ s)$ が $s=\sqrt{2}\,t^2-2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに，点 P を原点を中心として 45° 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする．さらに，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする．

(1)　点 Q$(x,\ y)$ の座標を，t を用いて表せ．

(2)　直線 $y=a$ と曲線 C がただ１つの共有点を持つような定数 a の値を求めよ．

(3)　図形 D を y 軸のまわりに１回転して得られる回転体の体積 V を求めよ．

《14 東工大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　３次の面積と無限級数，不等式が成り立つ条件，斜回転体の体積

10　xy 平面上の曲線 $C: y=x^3+x^2+1$ を考え，C 上の点 $(1,\ 3)$ を P_0 とする．$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 $P_{k-1}(x_{k-1},\ y_{k-1})$ における C の接線と C の交点のうちで P_{k-1} と異なる点を $P_k(x_k,\ y_k)$ とする．このとき P_{k-1} と P_k を結ぶ線分と C によって囲まれた部分の面積を S_k とする．

(1)　S_1 を求めよ．

(2)　x_k を k を用いて表せ．

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}$ を求めよ．

《14 東工大・理系》

【答】 (1)　$\dfrac{64}{3}$　　(2)　$x_k=\dfrac{(-2)^{k+2}-1}{3}$　　(3)　$\dfrac{1}{20}$

【解説】 (1)　$y'=3x^2+2x$ より P_0 における接線は $y=5(x-1)+3$　　$\therefore$　$y=5x-2$.

これより

$$x^3+x^2+1=5x-2 \iff (x-1)^2(x+3)=0 \qquad \therefore\ x=-3,\ 1$$

よって

$$S_1=\int_{-3}^{1}\{(x^3+x^2+1)-(5x-2)\}dx=\int_{-3}^{1}(x^3+x^2-5x+3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{-3}^{1}=\boldsymbol{\frac{64}{3}}$$

(2)　$x=p$ における C の接線は

$y=(3p^2+2p)(x-p)+p^3+p^2+1$　　$\therefore$　$y=(3p^2+2p)x-2p^3-p^2+1$. これより

$$x^3+x^2+1=(3p^2+2p)x-2p^3-p^2+1 \iff (x-p)^2(x+2p+1)=0$$
$$\therefore\ x=-2p-1,p$$

よって $x_{k+1}=-2x_k-1$ を得る．ここで $x_{k+1}=-2x_k-1 \iff x_{k+1}+\dfrac{1}{3}=-2\left(x_k+\dfrac{1}{3}\right)$

より $x_k+\dfrac{1}{3}=\left(x_0+\dfrac{1}{3}\right)(-2)^k$ を得る．ゆえに $x_0=1$ より $\boldsymbol{x_k=\dfrac{(-2)^{k+2}-1}{3}}$.

(3)　$x_k-x_{k-1}=-(-2)^{k+1}$ より k が偶数のとき $x_k-x_{k-1}>0$，k が奇数のとき $x_k-x_{k-1}<0$ である．

また $x_{k-1}=p$ とすると，(2)の結果より $x_k=-2p-1$ なので，

(I)　k が奇数のとき

$$S_k=\int_{-2p-1}^{p}\{(x^3+x^2+1)-((3p^2+2p)x-2p^3-p^2+1)\}dx$$
$$=\int_{-2p-1}^{p}\{x^3+x^2-(3p^2+2p)x+2p^3+p^2\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(3p^2+2p)x^2+(2p^3+p^2)x\right]_{-2p-1}^{p}$$
$$=\frac{1}{12}(3p+1)^4=\frac{16^{k+1}}{12}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(Ⅱ)　k が偶数のとき，(Ⅰ)と同様に

$$\begin{aligned} S_k &= \int_p^{-2p-1}\{((3p^2+2p)x-2p^3-p^2+1)-(x^3+x^2+1)\}dx \\ &= \frac{1}{12}(-3p-1)^4=\frac{16^{k+1}}{12} \end{aligned}$$

以上より $S_k=\dfrac{16^{k+1}}{12}$ なので $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{12}{16^{k+1}}=\frac{\frac{12}{16^2}}{1-\frac{1}{16}}=\mathbf{\frac{1}{20}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

11　$a>1$ とし，次の不等式を考える．

$$(*)\quad \frac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{a}}$$

(1)　$a=2$ のとき，すべての $t>0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つことを示せ．

(2)　すべての $t>0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つような a の範囲を求めよ．

《14 東工大・理系》

【答】 (1)　略　　(2)　$a\geqq 2$

【解説】 (1)　$a=2$ のとき，$(*)$ $\iff$ $e^t-1\geqq te^{\frac{t}{2}}$ $\iff$ $e^{\frac{t}{2}}\left(e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}-t\right)\geqq 0$ より

$e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}-t\geqq 0$ を示せばよい．

$e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}-t=f(t)$ とおくと $f'(t)=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}\right)-1$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より $e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}\geqq 2\sqrt{e^{\frac{t}{2}}\cdot e^{-\frac{t}{2}}}=2$ が成り立つので，$f'(t)\geqq 0$．この結果と $f(0)=e^0-e^0-0=0$ より $t>0$ において $f(t)>0$ が示された．よって $f(t)\geqq 0$ なので $(*)$ が成り立つ．

(2)　$e^t-1-te^{\frac{t}{a}}=g(t)$ とおくと，$t>0$において常に $g(t)\geqq 0$ となるような a の条件を求めるとよい．

$g'(t)=e^t-1\cdot e^{\frac{t}{a}}-t\cdot e^{\frac{t}{a}}\cdot\dfrac{1}{a}=e^{\frac{t}{a}}\left\{e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t}-\dfrac{1}{a}t-1\right\}$ と なる．$h(t)=e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t}-\dfrac{1}{a}t-1$ とおくと，$h'(t)=\left(1-\dfrac{1}{a}\right)e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t}-\dfrac{1}{a}$，より $h''(t)=\left(1-\dfrac{1}{a}\right)^2e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t}>0$ であり，

$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}h'(t)=-\frac{1}{a}<0$，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}h'(t)=\infty$ なので $h'(t)=0$ をみたす実数はただ１つだけ存在しそれを α とおく．

このとき $h'(0)=\dfrac{a-2}{a}$ なので，$1<a<2$ のとき $h(t)$ の増減は

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$	0	↘		↗

となることから，$t=0$ の近辺における $g(t)$ の増減が

t	0	$\cdots$
$g'(t)$		$-$
$g(t)$	0	↘

となるので，$t>0$ の範囲において常に $g(t)\geqq 0$ とならないので不適．

$a\geqq 2$ のとき $h'(0)\geqq 0$ となるので，$t>0$ において $h'(t)>0$．これと $h(0)=0$ より $t>0$ において $h(t)>0$ なので，$g'(t)>0$．これと $g(0)=0$ より $t>0$ において常に $g(t)>0$ と

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

なる．よって $(*)$ が成り立つことになる．

以上より，求める条件は $a \geqq 2$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

12 点 $P(t,\ s)$ が $s=\sqrt{2}\,t^2-2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに，点 P を原点を中心として $45°$ 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする．さらに，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする．

(1) 点 $Q(x,\ y)$ の座標を，t を用いて表せ．

(2) 直線 $y=a$ と曲線 C がただ１つの共有点を持つような定数 a の値を求めよ．

(3) 図形 D を y 軸のまわりに１回転して得られる回転体の体積 V を求めよ．

《14 東工大・理系》

【答】 (1) $(x,\ y)=\left(-t^2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}t,\ t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t\right)$　(2) $a=-\dfrac{1}{8}$　(3) $V=\dfrac{11}{120}\pi$

【解説】 (1) $\cos 45°+i\sin 45°=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ なので

$$x+yi=\{t+(\sqrt{2}\,t^2-2t)i\}\times\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\left(-t^2+\frac{3}{\sqrt{2}}t\right)+\left(t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)i$$

よって $\boldsymbol{(x,\ y)=\left(-t^2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}t,\ t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t\right)}$

(2) $y=a \iff t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t=a \iff t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t-a=0$ が重解を持てばよいので，

$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-4\times(-a)=0$ ゆえに $\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{8}}$

(3) $t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t=\left(t-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2-\dfrac{1}{8}$ なので，$t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t\leqq 0$ つまり $0\leqq t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を考える．

このとき $t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t=k\left(-\dfrac{1}{8}\leqq k\leqq 0\right)$ の２解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha\leqq\beta)$ とすると，

$0\leqq\alpha\leqq\beta\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であり，解と係数の関係より $\alpha+\beta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\alpha\beta=-k$ である．

ここで $f(t)=-t^2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}t$ とおくと $f(t)=-\left(t-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{9}{8}$ より $0\leqq f(\alpha)\leqq f(\beta)$

である．また，$f(t)=-\left(t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t\right)+\sqrt{2}\,t$ より $f(\alpha)=\sqrt{2}\,\alpha-k$，$f(\beta)=\sqrt{2}\,\beta-k$ なので求める体積は

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-\frac{1}{8}}^{0}\pi\{(f(\beta))^2-(f(\alpha))^2\}\,dk=\pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0}\{(\sqrt{2}\,\beta-k)^2-(\sqrt{2}\,\alpha-k)^2\}\,dk\\
&= \pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0}\sqrt{2}\,(\beta-\alpha)\{\sqrt{2}\,(\alpha+\beta)-2k\}\,dk\\
&= \pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0}\sqrt{2(\alpha+\beta)^2-8\alpha\beta}\,\{\sqrt{2}\,(\alpha+\beta)-2k\}\,dk\\
&= \pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0}\sqrt{8k+1}\,(-2k+1)\,dk=\pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0}\left\{-\frac{1}{4}(8k+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{4}(8k+1)^{\frac{1}{2}}\right\}dk\\
&= \pi\left[-\frac{1}{80}(8k+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{48}(8k+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{1}{8}}^{0}=\boldsymbol{\frac{11}{120}\pi}
\end{aligned}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。